

# Estudo dos padrões estacionários de Chladni

## Study of Chladni's stationary patterns

Thomaz Santos Neres<sup>1</sup>, Edvaldo Alves de Souza<sup>\*1</sup>, Emerson Luís Santa-Helena<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Sergipe, Departamento de Física, São Cristóvão, SE, Brasil.

Recebido em 20 de novembro de 2023. Revisado em 05 de fevereiro de 2024. Aceito em 07 de fevereiro de 2024.

A física ondulatória descreve sistemas físicos nos quais uma força restauradora comanda o movimento oscilatório do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. Essas oscilações se manifestam em diferentes tipos de ondas e se propagam com velocidades associadas às distintas características do meio de propagação. Uma manifestação que impressiona pela simetria, pela própria elegância, são os padrões de Chladni, que inclusive são utilizados como indicador de qualidade na fabricação de instrumentos musicais. Neste trabalho são apresentados um aparato experimental simples e uma interface gráfica matemática interativa, desenvolvida na plataforma GeoGebra a partir das soluções da equação de onda em placas quadradas para explorar o estudo de ondas estacionárias bidimensionais das placas de Chladni. Várias Figuras de Chladni foram criadas experimentalmente a partir de grãos depositados sobre diferentes placas metálicas sujeitas à vibração. Foram utilizadas placas quadradas de diferentes tamanhos com extremidades livres com o objetivo de observar a relação de proporção entre a frequência de ressonância dos padrões de onda estacionária com o inverso do quadrado do lado. Foi constatado que a associação entre os resultados experimentais obtidos pela modelagem computacional na formação das Figuras de Chladni permite uma melhor compreensão dos princípios que controlam a formação desses padrões.

**Palavras-chave:** Figuras de Chladni, experimentação, modelagem computacional, ondas estacionárias.

Wave physics describes physical systems in which a restoring force governs the oscillatory motion of the system around an equilibrium point. These oscillations manifest themselves in different types of waves and propagate at speeds associated with the different characteristics of the propagation medium. One of the phenomena that impresses by their symmetry and elegance are the Chladni patterns, which are even used as an indicator of quality in the manufacture of musical instruments. In this paper, a simple experimental apparatus and an interactive mathematical graphical interface, which was created at the GeoGebra platform by equations solutions from the wave equation in square plates, were developed to study two dimensional Waves of the Chladni plates. Several Chladni figures were experimentally created from grains deposited on different metal plates under vibration. Square plates of different sizes with free edges were used to observe the ratio relationship between the resonance frequency of the stationary wave patterns and the inverse of the square of the side. It was found that the association between the experimental results and those obtained by computer modeling in the formation of Chladni figures allows for a better understanding of the principles that control the formation of these patterns.

**Keywords:** Chladni figures, experimentation, computational modeling, standing waves.

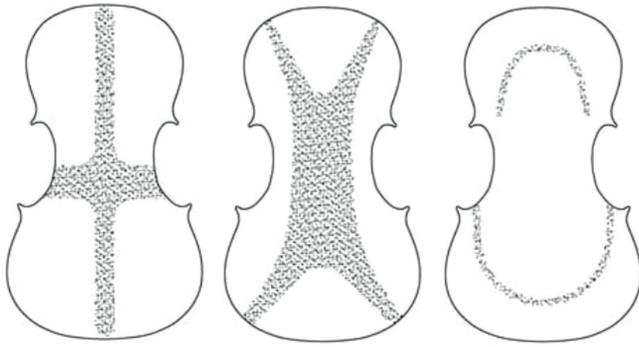
## 1. Introdução

A todo instante, interpretamos com facilidade as interferências de várias ondas sonoras que chegam aos nossos ouvidos, mesmo em ambientes ruidosos [1]. Entretanto, comumente há muita dificuldade em interpretar formulações matemáticas de fenômenos ondulatórios vindas de um experimento, principalmente quando aplicada a ondas em mais de uma dimensão. Essa é uma consequência, em geral, da abordagem limitada a apenas ondas unidimensionais de parte dos livros que são adotados em cursos de Física. Assim como as unidimensionais, as ondas bidimensionais também apresentam conceitos como ressonância, condições de contorno, características do meio de propagação, velocidade, tipos de ondas, etc., que podem ser observados de maneira até lúdica

quando se propagam em sólidos, fenômeno amplamente investigado por Chladni [2].

As Figuras de Chladni, como são conhecidos os padrões de ondas estacionárias ou de frequências ressonantes em superfícies bidimensionais como placas, chapas, membranas, e tampões, têm relevante aplicação no campo da música na determinação da qualidade de instrumentos musicais feitos de madeira como o violino e violão [2]. O tipo de madeira, bem como as dimensões utilizadas em cada parte do instrumento influem na qualidade do som ressoado através da caixa acústica. Com a aplicação de areia polvilhada na superfície do material perturbado, é possível enxergar as regiões equivalentes aos nodos do caso unidimensional de uma corda vibrando como se pode ver na Figura 1. As três configurações de linhas nodais foram obtidas pelo Método Chladni e são chamadas de modos de vibração 1, 2 e 5 com frequências correspondentes a  $(112 \pm 12) \text{ Hz}$ ,  $(171 \pm 20) \text{ Hz}$ ,

\*Endereço de correspondência: [edvaldo.alves@academico.ufs.br](mailto:edvaldo.alves@academico.ufs.br)



**Figura 1:** Modos principais de vibração do tampo inferior de um violino. Fonte: Imagem obtida do artigo de Donoso e colaboradores [3].

(a) Modo  $(2,0) - (0,2)$  (b) Modo  $(2,0) + (0,2)$



**Figura 2:** Combinação dos modos  $(2,0)$  e  $(0,2)$  observados em uma placa metálica.

$(369 \pm 36) \text{ Hz}$  (observadas da esquerda para a direita). Essa sequência de modos de vibração é necessária para que a madeira se comporte de forma harmônica em violinos de boa qualidade onde é característico que os modos 2 e 5 se encontrem separados por uma oitava, ou seja, numa razão 1:2 na frequência [3]. Alguns desses modos podem ser observados numa placa retangular ou quadrada (Figura 2) correspondentes às menores frequências de vibração associadas aos modos  $(1,1)$ ,  $(2,0) - (0,2)$ , e  $(2,0) + (0,2)$ .

O Método Chladni também pode ser aplicado em processos de testes e de fabricação de instrumentos musicais de percussão e de cordas. Além do mais, os comportamentos vibracionais de diversos materiais podem ser estudados a partir da análise modal de uma placa metálica flexível acoplada a uma cavidade acústica com a finalidade de encontrar soluções inovadoras, através do estudo dos níveis de ruído em sistemas como cabines veiculares, alto-falantes, motores de combustão [4].

Diversos são os modos vibracionais que aparecem em uma placa. Ao vibrar, ondas de compressão (ondas longitudinais), de cisalhamento, de torção, e/ou ondas de flexão se propagam pela placa quando sujeita a diferentes condições de contorno [5]. Este trabalho se propõe a fornecer ferramentas para o aprimoramento dos conhecimentos relacionados a ondas estacionárias bidimensionais por meio do estudo das Figuras de Chladni, utilizando um aparato experimental controlado

via smartphone em conjunto com um ambiente de modelagem computacional (GeoGebra). Particularmente, será abordado o estudo da vibração de placas quadradas com as extremidades livres.

## 2. Aparato Experimental

Não há muitos trabalhos acadêmicos que se predispõem a utilizar metodologias voltadas para o ensino da ondulatória bidimensional. Contudo, há alguns em que se utiliza uma maneira de aprendizagem significativa e visualmente intrigante de demonstrar o movimento vibratório de placas finas através do experimento das Figuras de Chladni [6–8], com equipamentos eletrônicos de custos elevados. Na busca de tornar a utilização desse tipo de experimento mais acessível, abordamos uma nova proposta utilizando materiais com menor custo e, de fácil montagem. A descrição está feita em um material suplementar.

### 2.1. Interface gráfica

O GeoGebra é um software de código aberto de matemática dinâmica que apresenta um grande acervo de materiais didáticos que podem ser compartilhados livremente, reunindo recursos de cálculos, criação de gráficos, simulações, ferramentas para criar animações tanto em duas como em três dimensões, botões, controles deslizantes, etc.. Além disso, os códigos desses materiais são abertos permitindo aos programadores independentes criarem modificações na programação de acordo com suas próprias necessidades [9]. Sua versatilidade pode ser observada em diversos trabalhos da literatura [10–12].

O GeoGebra oferece duas opções de linguagem de programação: código GeoGebra e JavaScript. Três áreas principais são utilizadas para a criação da modelagem: a janela de Álgebra (janela principal) em que os objetos e controles são criados através da inserção de funções e proposições lógicas; a janela de visualização, em que são exibidos os controles da simulação como botões, caixas de visualização e controle deslizante; e a janela de visualização 3D, onde é visualizada a execução de tudo que foi inserido, programado e controlado nas janelas anteriores.

O GeoGebra, neste trabalho, foi utilizado para construir uma interface que permitisse representar e analisar virtualmente alguns dos padrões de Chladni para o problema da placa quadrada com os quatro lados livres. A Figura 3 mostra a interface criada que pode ser acessada no endereço <https://www.geogebra.org/m/nxggmpfs>.

## 3. Vibração de uma Placa Retangular

Uma placa pode ser comparada a uma barra bidimensional ou a uma membrana com rigidez [5]. Uma placa, ao vibrar, pode transmitir ondas de compressão (ondas

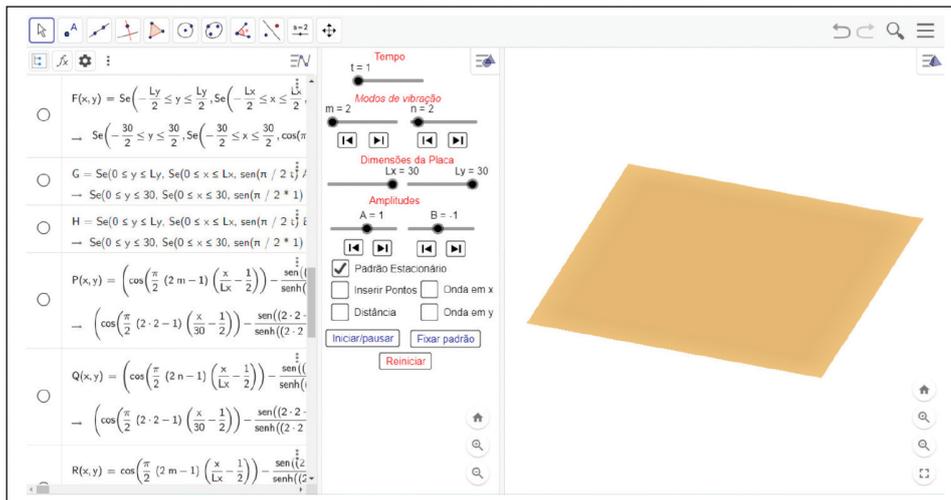


Figura 3: Interface de modelagem do GeoGebra. Janelas: de álgebra, de visualização dos controles, e de visualização 3D.

longitudinais), de cisalhamento, de torção, e/ou ondas de flexão.

A velocidade da onda de compressão pode ser calculada da mesma forma que se calcula para uma corda ou para uma barra. A ligeira expansão lateral da onda é acompanhada de uma pequena rigidez adicional. Desta forma, a velocidade longitudinal,  $c_L$  é descrita por:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}}, \tag{1}$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson, termo relacionado à contração lateral.  $E$  é a tensão intrínseca da placa chamada de módulo de elasticidade ou Módulo de Young, e  $\rho$  é a densidade volumétrica da placa.

A seguir, temos a representação de uma placa retangular com um de seus vértices coincidindo com a origem do plano  $XY$  como mostra a Figura 4.

Para o caso de ondas estacionárias viajando em um plano, a amplitude de vibração dependerá da superposição de uma onda estacionária na direção  $x$  e outra na direção  $y$ .

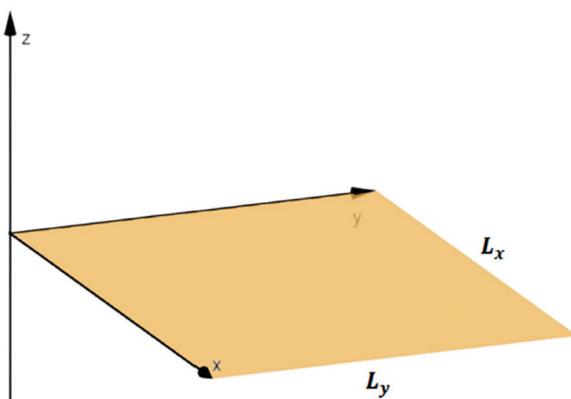


Figura 4: Placa de lados  $L_x$  e  $L_y$  no plano  $XY$ .

As figuras de Chladni são os padrões de ondas estacionárias geradas pelas ondas de flexão (ondas cujos deslocamentos das partículas têm componentes normais e paralelas à direção de propagação, e cuja velocidade depende da frequência – ondas dispersivas – e de propriedades e geometria do material) que podem ser descritas por:

$$-D\nabla^4 z = \rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \tag{2}$$

em que  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  é a rigidez flexural, termo que depende das características mecânicas da placa. Temos ainda que  $z$  representa o deslocamento transversal de qualquer ponto da placa em função do tempo, e  $h$  é a espessura da placa.

A solução para a forma de vibração da placa na direção  $z$  deve satisfazer as condições de contorno para as quatro laterais da placa. De (2) e aplicando o operador  $\nabla^4$ , chegamos à seguinte equação que também deve satisfazer a solução do problema [13]:

$$\frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z(x, y, t)}{\partial y^4} + \frac{12\rho(1 - \nu^2)}{Eh^2} \cdot \frac{\partial^2 z(x, y, t)}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Entretanto, não é possível encontrar uma forma para o deslocamento transversal  $z(x, y, t)$  de qualquer ponto da placa em função do tempo que satisfaça a Equação 3 juntamente com as condições de contorno para o caso da placa com os quatro lados livres. É necessário assumir a parte espacial da solução  $Z(x, y)$  composta por uma série infinita, em que cada termo da série satisfaz a equação. A solução geral para o deslocamento na direção  $z$  será da forma:

$$z(x, y, t) = Z(x, y) \sin(\omega t). \tag{4}$$



Figura 5: Terceiro modo. Fonte: [14].

Sendo

$$Z(x, y) = \sum A_{mn} X_{mn}(x) Y_{mn}(y). \tag{5}$$

Como exemplo, de acordo com os parâmetros tabelados em Leissa [14] para o terceiro modo (Figura 5) de vibração da placa para  $\nu = 1/3$ , teremos

$$\text{Terceiro modo: } Z(x, y) = A_{02}(X_0Y_2 + X_2Y_0) + A_{22}X_2Y_2 + A_{04}(X_0Y_4 + X_4Y_0) + A_{24}(X_2Y_4 + X_4Y_2) + A_{44}X_4Y_4 + \dots$$

Sendo:

$$\begin{aligned} A_{02} &= 1 \\ A_{22} &= -0,0447 \\ A_{04} &= -0,02011 \\ A_{24} &= -0,00384 \\ A_{44} &= -0,0282 \end{aligned}$$

Na Figura 6, as linhas nodais representam meia onda em cada direção. As regiões com o sinal “+” representam regiões onde  $Z(x, y) > 0$ , enquanto que as de sinal “-” representam regiões onde  $Z(x, y) < 0$ . A interseção destas superfícies forma as linhas nodais.

O problema de vibração de placas quadradas com extremidades livres, considerando uma placa elástica fina e isotrópica de espessura constante, foi abordado por Warburton [13] utilizando uma solução mais simples. Ele tomou os termos de maior contribuição na série (Equação 5). Desta forma, temos

$$Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y), \tag{6}$$

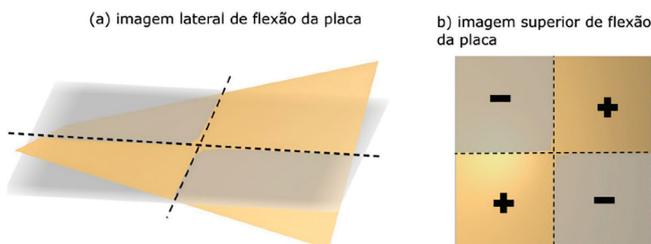


Figura 6: Modo fundamental (1, 1) de vibração de uma placa quadrada.

em que, para  $x = 0$  e  $x = L_x = L_y$ .

$$X(x) = \begin{cases} \cos \gamma \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)} \cdot \cosh \gamma \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } m = 2, 4, 6\dots \\ \sin \gamma' \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\gamma'/2)}{\sinh(\gamma'/2)} \cdot \sinh \gamma' \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } m = 1, 3, 5\dots \end{cases}$$

De maneira análoga, para a direção  $y$

$$Y(y) = \begin{cases} \cos \epsilon \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\epsilon/2)}{\sinh(\epsilon/2)} \cdot \cosh \epsilon \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } n = 2, 4, 6\dots \\ \sin \epsilon' \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sin(\epsilon'/2)}{\sinh(\epsilon'/2)} \cdot \sinh \epsilon' \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) & \text{para } n = 1, 3, 5\dots \end{cases}$$

Os fatores de amplitudes,  $\gamma$  e  $\gamma'$  definidos para cada padrão nodal são encontrados graficamente através da interseção entre curvas de equações:

$$\begin{cases} \tan(\gamma/2) + \tanh(\gamma/2) = 0 & \text{para } m \text{ par} \\ \tan(\gamma'/2) - \tanh(\gamma'/2) = 0 & \text{para } m \text{ ímpar} \end{cases}$$

Pode-se chegar à seguinte relação:

$$\gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2}(2m - 1). \tag{7}$$

Ritz mostrou que a superposição dos modos  $(m, n) \pm (n, m)$  para uma placa quadrada,  $L_x = L_y$ , só existe nas condições em que  $m - n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$  [13].

Teremos então como solução geral os seguintes casos de formas de vibração:

**Caso 1:** Modos  $(m, n) \pm (n, m)$  para  $n = 0$ , em que  $m = 2, 4, 6, \dots$

$$Z(x, y) = A \left[ \cos \gamma \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \pm A \left[ \cos \gamma \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \tag{8}$$

com  $\alpha = -\frac{\sin(\gamma/2)}{\sinh(\gamma/2)}$ .

**Caso 2:** Modos  $(m, n) \pm (n, m)$  para  $n = 1$ , em que  $m = 3, 5, 7, \dots$

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= A \left( 1 - \frac{2y}{L_y} \right) \left[ \sin \gamma' \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha' \cdot \sinh \gamma' \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &\pm A \left( 1 - \frac{2x}{L_x} \right) \left[ \sin \gamma' \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha' \cdot \sinh \gamma' \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \tag{9}$$

$$\text{com } \alpha' = \frac{\sin(\gamma'/2)}{\sinh(\gamma'/2)}.$$

**Caso 3:** Modos  $(m, n) \pm (n, m)$  para  $m > 1, n > 1$ , em que  $m$  e  $n$  assumem quantidades diferentes.

$$\begin{aligned} Z(x, y) = & A \left[ \cos \gamma \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ & \cdot \left[ \cos \epsilon \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \beta \cdot \cosh \epsilon \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \pm & A \left[ \cos \epsilon \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) + \beta \cdot \cosh \epsilon \left( \frac{x}{L_x} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ & \cdot \left[ \cos \gamma \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) + \alpha \cdot \cosh \gamma \left( \frac{y}{L_y} - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{com } \beta = \frac{\sin(\epsilon/2)}{\sinh(\epsilon/2)} \text{ e } \epsilon = \frac{\pi}{2}(2n - 1).$$

Adotando uma solução harmônica da forma  $z = Z(x, y)e^{i\omega t}$ , podemos reescrever a Equação 2 da seguinte maneira:

$$\nabla^4 Z(x, y) - k^4 Z(x, y) = 0, \tag{11}$$

$$\text{em que } k = \left( \frac{\sqrt{12}\omega}{h} \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\sqrt{12}\omega}{c_L \cdot h} \right)^{\frac{1}{2}},$$

termo chamado de número de onda.

Como  $v = \frac{\omega}{k}$  e  $\omega = 2\pi f$ , obtemos para a velocidade da onda transversal a equação:

$$v(f) = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}} f h c_L}. \tag{12}$$

A frequência das ondas de flexão é proporcional a  $k^2$ . Os valores de  $k$  correspondem aos modos normais de vibração de acordo com as condições de contorno [5].

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_L h}{\sqrt{48\pi^2}} k^2 \tag{13}$$

Desta forma, é possível observar, a partir da Equação 12, que a velocidade da onda transversal depende da frequência para ondas de flexão [5]. Isso acontece devido ao acoplamento de movimento de flexão nas duas direções, o que faz com que os modos de vibração em ambas as direções não sejam puros como no caso de uma barra. Desta forma, as linhas nodais se tornam curvas.

A frequência fundamental de ressonância (Figura 6) para uma placa quadrada de extremidades livres se relaciona com o comprimento de onda correspondente ao dobro do comprimento da placa,  $\lambda = 2L$ . Sendo  $k = 2\pi/\lambda$ ,

$$k = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}. \tag{14}$$

Substituindo 14 em 13,

$$f_{mn} = \frac{1}{L^2} \frac{c_L h \pi}{\sqrt{48}} \cdot \xi_{mn}, \tag{15}$$

em que  $\xi_{mn}$  é o fator de frequência que depende das condições de contorno das extremidades da placa e, consequentemente, dos modos normais de vibração  $m$  e  $n$ .

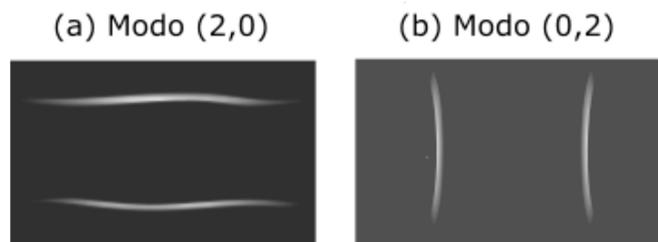
De acordo com Warburton [13], o fator de frequência é definido como:

$$\xi_{mn}^2 = G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 [\nu H_x H_y + (1-\nu) J_x J_y], \tag{16}$$

em que os coeficientes  $G_x, G_y, H_x, H_y, J_x, J_y$  dependem das condições de contorno e dos modos de vibração. A Tabela 1 apresenta os coeficientes  $G_x, H_x, J_x$  para uma placa de extremidades livres.

Para os demais coeficientes, os valores são os mesmos, fazendo a troca de  $m$  por  $n$ .

Para uma placa em que  $L_x \gg L_y$ , os modos (2,0) e (0,2) surgem completamente independentes como se pode ver na Figura 7.



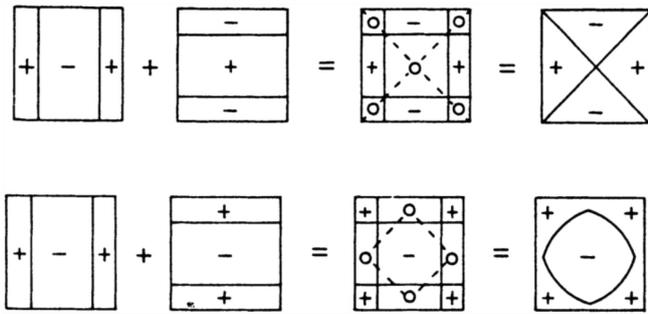
**Figura 7:** Modos de vibração independentes. Fonte: [5].

Se  $L_x \rightarrow L_y$ , os modos independentes se combinam linearmente para formar dois novos modos. No caso de uma placa quadrada, duas combinações são possíveis, dependendo se os modos estão em fase ou fora de fase, como se pode ver na Figura 8. A combinação

**Tabela 1:** Coeficientes da Equação 16 para a placa de extremidades livres.

$m$	$G_x$	$H_x$	$J_x$
0	0	0	0
1	0	0	$\frac{12}{\pi^2}$
2	1,506	1,248	5,017
3, 4, 5, ...	$m - \frac{1}{2}$	$(m - \frac{1}{2})^2 \cdot \left[ 1 - \frac{2}{(m - \frac{1}{2})\pi} \right]$	$(m - \frac{1}{2})^2 \cdot \left[ 1 - \frac{6}{(m - \frac{1}{2})\pi} \right]$

Fonte: [13].



**Figura 8:** Modo X,  $(2,0) - (0,2)$ , e do modo anel,  $(2,0) + (0,2)$ . Fonte: [5].

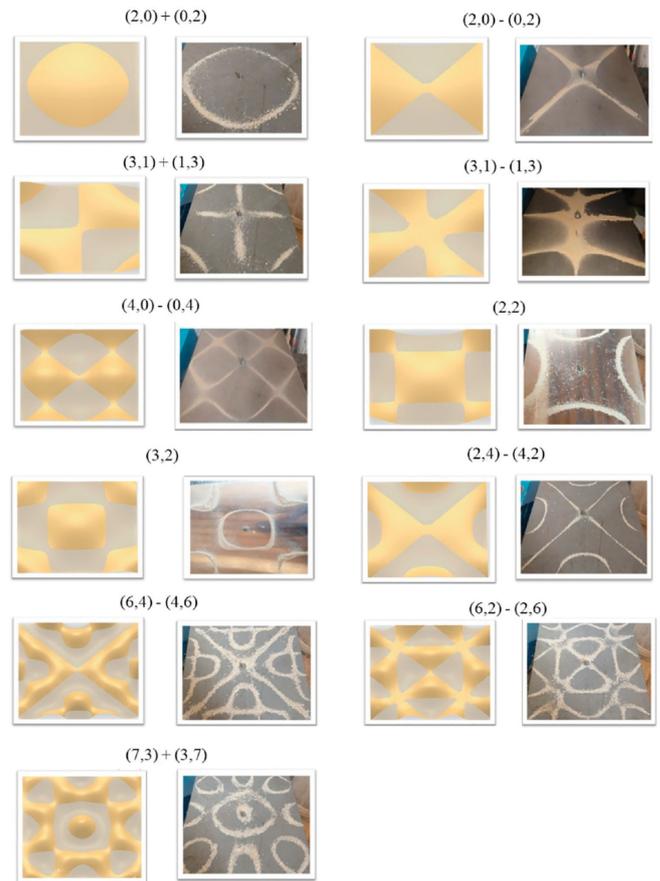
$(2,0) + (0,2)$  tem um valor de frequência maior que  $(2,0) - (0,2)$ . No modo anel (Figura 2a) ocorre uma rigidez adicional devido ao fato de que os movimentos de flexão se opõem. Já no modo X (Figura 2b) cada modo auxilia o outro através de uma interação elástica chamada de acoplamento de Poisson.

#### 4. Resultados e Discussão

A formação das figuras de Chladni não é tão simples de ser entendida. Muitos podem achar, inicialmente, que se trata de uma força de atração entre as partículas (farinha ou areia, por exemplo), quando na verdade existem regiões na onda estacionária em que ocorrem interferências totalmente destrutivas chamadas de linhas nodais. Ou seja, esses pontos permanecerão estáticos formando uma região no qual os grãos se acumulam. É importante destacar que os pontos onde a função espacial  $Z(x, y)$  se anula, a função  $z(x, y, t)$  (Equação 4) também se anula.

A fim de representar esse fenômeno através da visualização do movimento de vibração da placa, apresenta-se resultados de um aparato experimental e um ambiente de modelagem computacional, como descritos anteriormente, em duas placas quadradas de ferro com lados  $25\text{ cm}$  e  $20\text{ cm}$ , e  $1\text{ mm}$  de espessura, com os quatro lados livres. Os resultados são apresentados na Figura 9 (resultados para o GeoGebra foram obtidos a partir das equações 8, 9, 10).

Nas imagens com a simulação (Figura 9) é observada uma região cinza e uma região bege. Elas representam oscilações para regiões positivas e negativas respectivamente. A interface entre essas oscilações é que serão as regiões em que as figuras de Chladni serão formadas. Vale a pena uma comparação do resultado esperado com o resultado obtido entre as figuras 9 e 8. Tanto para a combinação  $(2,0) + (0,2)$  quanto para a combinação  $(2,0) - (0,2)$ , os resultados demonstram a correta interpretação das equações. Além disso, os resultados da modelagem e do experimento estão em conformidade com o que Leissa [14] escreveu a partir de um compilado de estudos.



**Figura 9:** Comparações de modos: modelagem x experimento.

Um resultado significativo foi encontrado aplicando-se a Equação 15, e considerando duas placas de mesmo material e de mesmas espessuras. As frequências de ressonância são inversamente proporcionais ao quadrado do lado, como pode ser visto na Equação 15, e que de maneira mais simples pode ser reescrita como

$$f_{mn} = \frac{\xi_{mn}}{L^2} \cdot constante. \tag{17}$$

Dela chegamos à seguinte relação entre as frequências e as dimensões para as duas placas de mesmo material:

$$f' = \frac{L^2}{L'^2} \cdot f. \tag{18}$$

A Equação 18 foi aplicada utilizando duas placas de diferentes dimensões. Os dados foram coletados através do ajuste de frequência obtidos para os mesmos modos de vibração nas duas placas.

Na Tabela 2 temos as frequências de ressonância para os nove padrões estacionários com suas incertezas, em que  $f'$  e  $f$  representam as frequências de ressonância das placas de ferro de  $(20\text{ cm})^2$  e  $(25\text{ cm})^2$  respectivamente.

Na Figura 10 são apresentadas as figuras de Chladni relativas a Tabela 2, formadas pelas placas de ferro quadrada de lado  $25\text{ cm}$ . A partir dos valores dessa

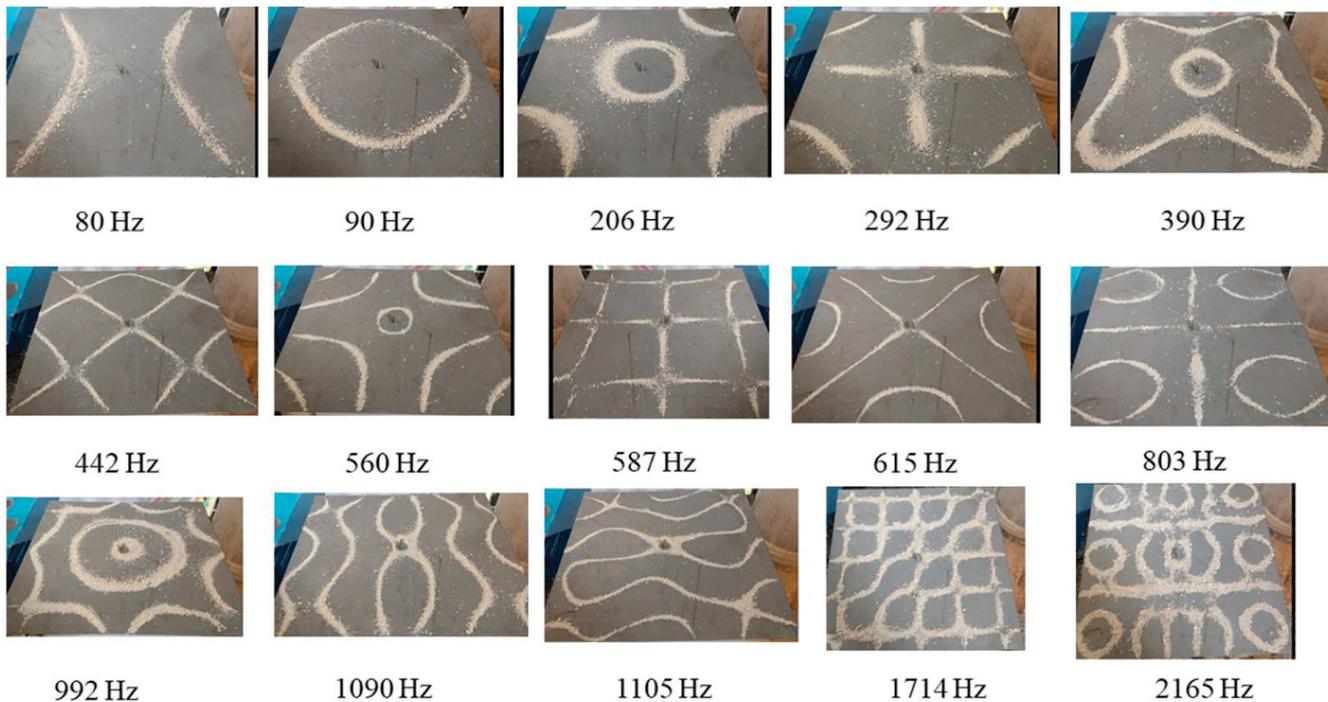


Figura 10: Figuras de Chladni na placa de ferro 25 cm × 25 cm.

Tabela 2: Frequências de ressonância nas placas de ferro.

$f'(Hz) : (20\text{ cm})^2$	$f(Hz) : (25\text{ cm})^2$
119,5 ± 1,5	79,0 ± 3,0
125,5 ± 2,5	88,5 ± 1,5
335,5 ± 5,0	216,5 ± 0,5
454,5 ± 0,5	291,5 ± 0,5
605,0 ± 7,5	404,5 ± 7,5
686,0 ± 1,0	442,0 ± 2,0
875,0 ± 5,0	569,0 ± 5,0
903,5 ± 0,5	587,5 ± 0,5
950,5 ± 0,5	615,5 ± 0,5

Considerando que as placas quadradas de ferro possuem lados de 20 cm e 25 cm, temos que o valor teórico é:

$$\frac{L^2}{L'^2} = \frac{25^2}{20^2} = 1,56. \tag{19}$$

A incerteza relativa foi de aproximadamente 0,13%. O erro relativo foi dado por 1,9%. Os resultados mostram que o experimento tem ótima exatidão e precisão, e traz segurança para quem precisa encontrar as frequências de ressonância, até mesmo estudá-las utilizando os padrões de Chladni.

tabela, foi gerado um gráfico de  $f'$  versus  $f$  apresentado na Figura 11.

Uma vez encontrados os coeficientes angular e linear do gráfico da Figura 11, a saber,  $1,534 \pm 0,002$  e  $5,2 \pm 0,8$ , a Equação 18 foi utilizada para extrair a razão, experimental, entre as áreas das duas placas.

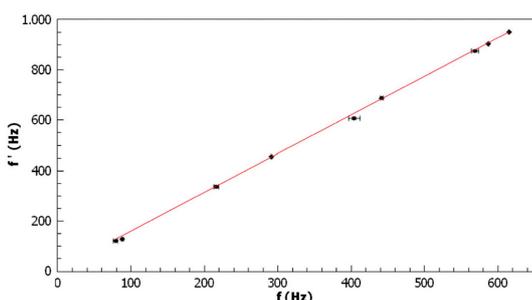


Figura 11: Gráfico  $f' \times f$  para a placa de ferro.

### 5. Conclusão

O estudo da formação e da análise das Figuras de Chladni por meio de experimento prático e computacional demonstrou-se viável dado a facilidade com que as duas formas se complementaram. Ambos apresentaram um lado lúdico que chamam a atenção e servem de motivação para buscarem o estudo e a compreensão da teoria e prática relacionada aos padrões bidimensionais. A análise visual das Figuras, feitas por meio do GeoGebra, mostrou-se bem próxima da realidade do experimento prático com as placas metálicas, estando em conformidade com o que foi visto neste trabalho e em outros da literatura. Junto com o experimento eles promovem o conhecimento a partir do significado das linhas nodais e de como os grãos se acumulam nelas formando as Figuras de Chladni. Considere ainda a montagem simples e de baixo custo, e a manipulação por tablet ou smartphnone, que se tornam

diferenciais para aplicação do experimento em sala. Foi possível ainda encontrar a relação entre as frequências de ressonância de duas placas quadradas de ferro com lados de 25 cm e 20 cm de espessuras de 1 mm, obtendo uma incerteza relativa de aproximadamente 0,13% e erro relativo dado por 1,9%. Além disso, o experimento pôde introduzir abordagens contextualizadas sobre a fabricação de caixas acústicas, como do violino e violão, e o vínculo com aplicações das ondas sonoras no campo da música.

## Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de estudos a um dos autores.

## Material suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:  
Informação suplementar

## Referências

- [1] M.L.N. Grillo, L.R.P.L. Baptista e L.P. Brandão, em: *XX SNEF-Simpósio Nacional de Ensino de Física* (São Paulo, 2013).
- [2] R.S. Santos, P.S. Camargo Filho e Z.F.D.C Rocha, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40**, e2602 (2018).
- [3] J.P. Donoso, A. Tannús, F. Guimarães e T.C. Freitas, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **30**, 2305 (2008).
- [4] P.H.R. Lima, *Análise modal experimental de placa flexível acoplada à cavidade acústica por vibrometro laser*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília (2017).
- [5] N.H. Fletcher e T.D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments* (Springer-Verlag, New York, 1998), 2 ed.
- [6] M.A. Lima, *Uso das figuras de Chladni no ensino de Física*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife (2020).
- [7] W.O. Silva, *Uma sequência de aulas para o estudo de ondas com auxílio das figuras de Chladni*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Roraima, Boa Vista (2018).
- [8] R.S. Santos, *Padrões sonoros de Chladni*. Dissertação de Mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina (2018).
- [9] M. Hohenwarter, *GeoGebra*, disponível em: <https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>, acessado em 22/03/2021.
- [10] L.A.C. Bracho, J.L. Prieto, I.C. Sánchez e R.E.G. Araujo, *Paradigma* **20**, 196 (2019).
- [11] A.C.V. Ribeiro, *Manual para desenvolvimento de simulações em geogebra: um recurso didático para o ensino de cinemática na educação básica*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Maranhão, São Luís (2019).
- [12] G.F. Melo, *O uso do geogebra para o desenvolvimento de habilidades no ensino de oscilações e conceitos de onda*. Dissertação de Mestrado, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Patos (2021).
- [13] G.B. Warburton, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* **168**, 371 (1954).
- [14] A. Leissa, *Vibration of Plates* (Acoustical Society of America, Washington, 1993).